Diagramas de Heissler para la solución de problemas de conducción transitoria.

Cuando el número de **Biot** modificado, descrito en la sección anterior supera el valor de 0,1, la resistencia interna ya no es despreciable, de manera que hay que recurrir a los diagramas de **Heisler**.

Las tres geometrías que tienen mayor importancia práctica son:

1. Una placa infinita de espesor 2L para la cual T=T(x,t), donde x es medido desde el centro de la placa.
2. Un cilindro infinito de radio, r_o, para el cual T=T(r,t)
3. Una esfera sólida de radio, r_o , para la cual T=T(r,t)

Para la aplicación de los diagramas de **Heisler** deben determinarse los números de **Biot** y los números de **Fourier**.

Para cuyo caso las longitudes características para el empleo de los diagramas vienen dada por:

Geometría	Lc
Placa infinita	L
Cilindro infinito	r_o
Esfera	r_o

Cálculo del calor total

El cálculo del calor total se puede realizar con la ayuda del concepto de la temperatura media.

La temperatura media, se refiere al promedio volumétrico de la temperatura, es decir:

$$T_m = \frac{1}{V}\int_V T dV$$

La temperatura media depende exclusivamente del tiempo, y en términos fisicos corresponde a la temperatura que adquiriría el cuerpo si repentinamente se aislará y se permitiera que alcanzara el equilibrio termodinámico.

En base a la temperatura media es sencillo determinar el calor total transferido por el cuerpo, el cual mediante un balance global puede ser determinado por.

$$Q = m\,c(T_i - T_m)$$

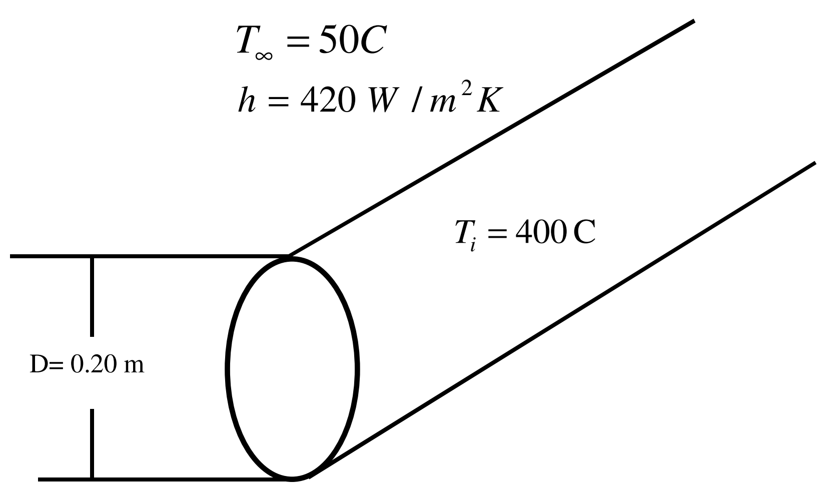
que en terminos adimensionales puede ser reescrito mediante:

$$\frac{Q}{Q_\infty} = \frac{m\,c(Ti - T_m)}{m\,c(T_i - T_\infty)} = 1 - \theta_m{}^*$$

Ejemplo. Un cilindro de hierro de gran longitud y diámetro 20 cm. Se encuentra inicialmente a 400 °C. La superficie exterior del cilindro es enfriada por aire que se encuentra a una temperatura de 50 °C y determina un coeficiente de transferencia de calor por convección de, h= 420W/m^2K.
Si el aire es mantenido sobre el cilindro por espacio de 20 min. Determine (a) La temperatura en el eje del cilindro y en su superficie, y (b) La cantidad de calor total por unidad de longitud transferido por el cilindro durante los 20 min. que duro el proceso.

Datos

K= 70 $W/m\ K$
$\alpha = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2/s$
$\rho\, c = 35 \cdot 10^5\ \mathrm{J}/m^2 k$



Solución

$t = 20 \cdot 60 = 1200\,\mathrm{s}$
$ro = 0{,}10\,m$

En primer lugar vamos a calcular el Bi_m.

$$Bi_m = \frac{h(ro/2)}{k} = \frac{420(0{,}10/2)}{70} = 0{,}30 >> 0.1$$

por tanto el análisis de resistencia interna despreciable no puede ser empleado y hay que recurrir a los diagramas de **Heisler**.

Para ello debemos calcular los Números de **Biot** y de **Fourier**, empleando el radio, ro como longitud característica.

(a)

$$Bi = \frac{h \cdot ro}{k} = \frac{420 \cdot 0{,}10}{70} = 0{,}60$$

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{ro^2} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 1200}{0{,}10^2} = 2{,}40$$

Vamos a los diagramas de **Heisler** correspondientes a un cilindro.

En la figura D.4 entramos con $Fo = 2{,}40$ y $\frac{1}{Bi} = 1{,}667$ y leemos la temperatura adimensional del eje del cilindro $To = T(r = o, t)$

Obteniéndose:

$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0{,}11$$

despejando, T_0

$T_0 = (400 - 50)\ 0{,}11 + 50 = 88{,}5\ C$ Conocido el valor de T_0, nos queda por determinar la temperatura en la superficie, Ts , $Ts = T(r = o, t)$

Este procedimiento se realiza empleando la Figura D5.

Para este caso se entra a la gráfica con el inverso de **Biot**, $\frac{1}{Bi} = 1{,}667$, y especificada la curva $r/ro = 1$, se lee

$$\frac{T\ \ -T_\infty}{T_0-T_\infty}=0{,}75$$

Se calcula $T=T(r/ro=1,t)=0{,}75\ \ (88{,}5-50)+50=79\,°C$

(b) Para el cálculo del calor total, se emplea la Figura D6, en dicha gráfica se entra con Bi^2Fo (abcisa) y se especifica la curva correspondiente al Bi, para este caso, se tiene:

$$Bi^2Fo=(0{,}06)^2\cdot 2{,}40=0{,}8640$$

$$Bi=0{,}60$$

Leyéndose

$$\frac{Q}{Q_\infty}=0{,}9$$

y

$$\frac{Q_\infty}{L}=\rho C\pi\cdot ro^2(T_i-T_\infty)=3{,}85\cdot 10^7\ \frac{W\cdot s}{m}$$

por lo tanto,

$$\frac{Q}{L}=0{,}9\cdot 3{,}84\cdot 10^7\ =3{,}46\cdot 10^7\ \frac{J}{m}$$

Aunque no lo pedía el problema es ilustrativo determinar la temperatura media.

$$\frac{T_m-T_\infty}{\mathrm{T_i}-T_\infty}=1-\frac{Q}{Q_\infty}=1-0{,}9=0{,}1$$

Por tanto, $T_m=85\,°C$.

Conducción transitoria en dos y tres dimensiones

Hasta aquí hemos discutido tan solo el flujo de calor unidimensional en paredes, cilindros y esferas. No obstante muchos problemas prácticos se incluyen flujo de calor en dos y tres dimensiones. Bajo ciertas condiciones especiales, la solución de problemas de conducción transitoria en dos y tres dimensiones, puede ser obtenida por la superposición del producto de soluciones de problemas unidimensionales.

Vamos a ilustrar con un ejemplo, considere el cilindro finito mostrado en la Figura. La solución para el cilindro finito puede ser obtenida como el producto de la solución para una placa infinita y la solución de un cilindro infinito.

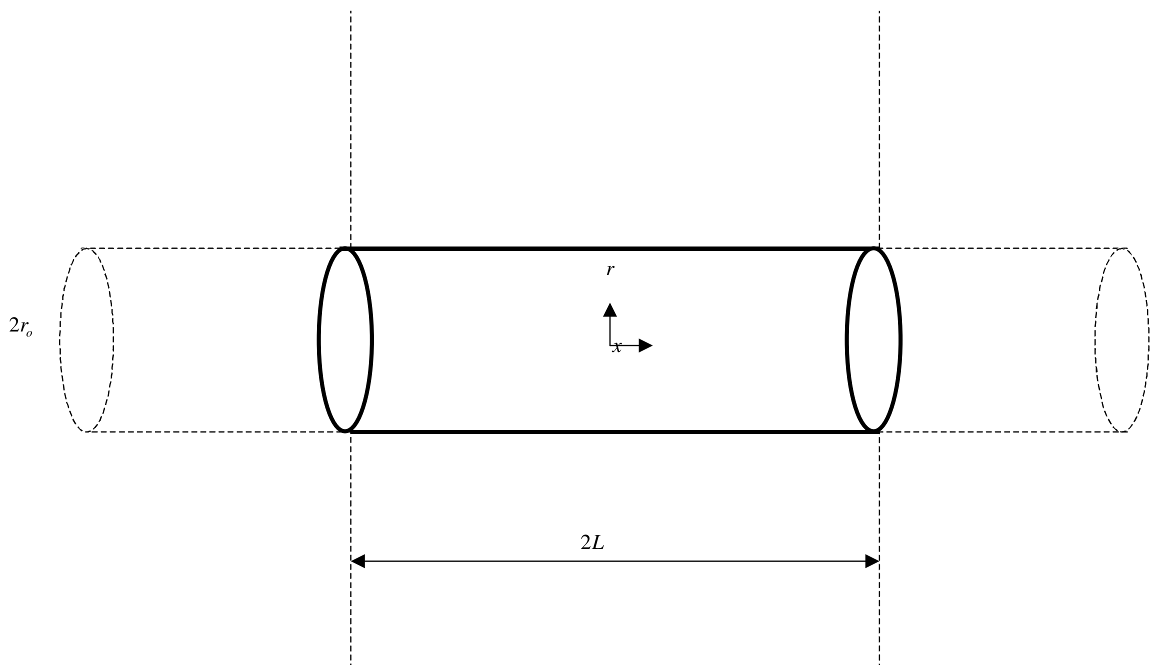


Figura Cilindro finito formado por la intersección de un cilindro infinito con una placa infinita.

De manera que para esta situación se tiene:

$$\frac{T(r,x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \left.\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{placa\\ \text{inf}\,inita}} \cdot \left.\frac{T(r,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{cilindro\\ \text{inf}\,inito}}$$

El principio de superposición descrito anteriormente puede ser aplicado a otras situaciones, tales como las indicadas a continuación

Barra rectangular formada por el producto de dos placas infinitas.

$$\frac{T(x,y,t)-T_\infty}{Ti-T_\infty}=\left.\frac{T(x,t)-T_\infty}{Ti-T_\infty}\right|_{\substack{placa\\ \inf inita}}\cdot\left.\frac{T(y,t)-T_\infty}{Ti-T_\infty}\right|_{\substack{placa\\ \inf inita}}$$

Paralelepípedo formado por el producto de tres placas infinitas.

$$\frac{T(x,y,t)-T_\infty}{Ti-T_\infty}=\left.\frac{T(x,t)-T_\infty}{Ti-T_\infty}\right|_{\substack{placa\\ \inf inita}}\cdot\left.\frac{T(y,t)-T_\infty}{Ti-T_\infty}\right|_{\substack{placa\\ \inf inita}}\cdot\left.\frac{T(z,t)-T_\infty}{Ti-T_\infty}\right|_{\substack{placa\\ \inf inita}}$$

El principio de superposición descrito en esta sección es aplicable sólo en situaciones en las cuales la temperatura inicial sea uniforme y que todas las superficies estén expuestas al mismo ambiente convectivo.

El cálculo del calor total para el caso de situaciones multidimensionales se puede realizar aplicando el principio del producto de soluciones a la temperatura media. De manera que una vez determinado la temperatura media, el calor total puede ser determinado por :

$$Q=mc(T_i-T_m)$$

Ejemplo. Un cilindro de hierro de longitud 10 cm y diámetro 20 cm, se encuentra inicialmente a 400 ^oC. La superficie exterior del cilindro es enfriada por aire que se encuentra a una temperatura de 50 ^oC y determina un coeficiente de transferencia de calor por convección de $h=420\,W/m^2K$.
Sí el aire es mantenido sobre el cilindro por espacio de 20 minutos. Determine la temperatura en el centro geométrico del cilindro y el calor total transferido.

Datos

$k=70\,W/m\;k$
$\alpha=2\cdot 10^{-5}\;\;m^2/s$
$\rho\,c=35\cdot 10^5\;\;J/m^2k$

Solución:

La solución al problema viene dada por:

$$\frac{T(o,o,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\left.\frac{T(o,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{placa\\ \inf inita}}\cdot\left.\frac{T(o,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{cilindro\\ \inf inito}}$$

Es importante calcular en forma independiente el Número de Fourier y el de Biot para cada solución por separado.

Cilindro infinito de radio ro=0,10 m:

Biot y Fourier ya fueron calculados en el ejemplo anterior

$Bi=0,60 \qquad 1/Bi=1,6667$

$Fo=2,40$

Leyendo de la gráficas se tiene:

$$\left.\frac{T(o,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{cilindro\\ \inf inito}}=0,11$$

y la Temperatura media ya ha sido calculada

$$\frac{T_m-T_\infty}{T_i-T_\infty}=0,10$$

Placa plana de espesor 0,1 m

Para este caso la longitud característica para entra en los diagramas de Heisler es el semiespesor, por tanto L=0,05 m

$$Bi=\frac{h\cdot L}{k}=\frac{420\cdot 0,05}{70}=0,3$$

$$Fo=\frac{\alpha\cdot t}{L^2}=\frac{2\cdot 10^{-5}\cdot 1200}{0,05^2}=9,6$$

y leyendo en la Figura D.1

se tiene:

$$\left.\frac{T(o,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{cilindro \\ \inf inito}} = 0{,}07$$

$$\frac{T(o,o,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \left.\frac{T(o,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{placa \\ \inf inita}} \cdot \left.\frac{T(o,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{cilindro \\ \inf inito}} = (0{,}07)(0{,}11) = 0{,}0077$$

por tanto T(0,0,1200s)=0,063(400-50)+50=52,7 C

La temperatura del centro es de 52,7 C

Y la temperatura media, se obtiene siguiendo un procedimiento similar,

$$\frac{T_m-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \left.\frac{T_m-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{placa \\ \inf inita}} \cdot \left.\frac{T_m-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right|_{\substack{cilindro \\ \inf inito}} = (0{,}1)(0{,}01) = 0{,}001$$

$$Q = 38{,}5 \cdot 10^5 \quad J$$